Prvi domaći zadatak iz predmeta Matematika 1

1. Dokazati sledeće skupovne jednakosti:
   a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
   b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
   c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

2. Na skupu X definisana je relacija ρ na sledeći način:
$$x \rho y \Leftrightarrow x - y \in X.$$
   Ispitati vrstu relacije ρ ukoliko je: *a)* $X = \mathbb{N}_0$; *b)* $X = \mathbb{Z}$.

3. Na skupu $A = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4\right\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:
$$x \rho y \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}) \vee (x \notin \mathbb{Z} \wedge y \notin \mathbb{Z}).$$
   Dokazati da je ova relacija relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije.

4. Naći oblast definisanosti sledećih funkcija
$$a)\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} + \sqrt{5-x^2}; \qquad b)\ \arcsin\left(\log_{10}\frac{x}{10}\right); \qquad c)\ f(x) = \log_{x^2-x-6}(x^2+x+6).$$

5. Data je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - \ln x}$.
   a) Odrediti oblast definisanosti D_f date funkcije.
   a) Ispitati monotonost funkcije f, uz korišćenje osobina monotonosti elementarnih funkcija.
   b) Ispitati injektivnost i surjektivnost funkcije f.

6. Dato je pravilo $f(x) = 1 + 2^{-x}$.
   a) Odrediti skupove A i B tako da funkcija $f : A \to B$, $f(x) = 1 + 2^{-x}$ bude bijekcija, i odrediti inverz tako zadate funkcije.
   b) Ispitati monotonost funkcije f (dozvoljeno je korišćenje osobina monotonosti elementarnih funkcija).

7. Data je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{10}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}}$.
   a) Odrediti oblast definisanosti D_f date funkcije.
   b) Ispitati monotonost funkcije f, uz korišćenje osobina monotonosti elementarnih funkcija.
   c) Ispitati injektivnost i surjektivnost funkcije f i odrediti f^{-1} ukoliko postoji.

8. Dat je skup $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z\}$. Dokazati da je strukture $(A, +)$, gde je $+$ uobičajeno sabiranje kompleksnih brojeva, grupa. Šta je sa strukturom $(A, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva?

9. Šta je algebarska struktura $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ ako je operacija $*$ definisana na sledeći način
$$a * b = a + b - ab?$$

10. Dokazati da je struktura $(\mathbb{R} \setminus \{-3\}, *)$ Abelova grupa, gde je operacija $*$ definisana na sledeći način:
$$x * y = xy + 3x + 3y + 6$$
    za svako $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

11. Dokazati da je skup kompleksnih brojeva $C = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, gde je i imaginarna jedinica, prsten u odnosu na operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

12. Ako su A i B podgrupe grupe G, dokazati da je $A \cap B$ takodje podgrupa grupe G.

13. a) Primenom matematičke indukcije dokazati da za $n \in \mathbb{N}$ važi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

b) Rešiti sledeću jednačinu u skupu realnih brojeva $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

c) Naći za koje vrednosti x u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ je zbir trećeg i petog člana iznosi 135, a zbir binomnih koeficijenata prva tri člana je 22.

14. a) Primenom matematičke indukcije dokazati da za sve prirodne brojeve n važi sledeća nejednakost

$$\frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-1)}{5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

b) Rešiti sledeću jednačinu u skupu realnih brojeva $|x^2+x-1|+|x^2-x-2|=2$.

15. a) Odrediti član koji ne sadrži a u razvoju binoma $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{b}+\frac{1}{\sqrt[15]{a^{20}}}\right)^n$, ako je zbir prva tri binomna koeficijenta jednak 79.

b) Neka je $a_0=0$, $a_1=1$ i $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Dokazati da je za svaki prirodan broj n, $a_n=2^n-1$.

16. a) Odrediti $n\in\mathbb{N}$ tako da je $\binom{n+1}{n-2}+2\binom{n-1}{3}=7(n-1)$.

b) Rešiti sledeću nejednačinu u skupu realnih brojeva $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}$.

17. Naći realan i imaginaran deo kompleksnog broja

$a)$ $(4-3i)(2+i)+(1-2i)^2$; $b)$ $\frac{(1-i)^3(\sqrt{3}-i)}{(1+i\sqrt{3})^2}$; $c)$ $\frac{i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

18. Rešiti jednačinu

$$\frac{(3+2i)(1+i)+2i}{(2-i)(1+i)-3}=\frac{7-i}{-4}z^3,$$

a zatim dobijena rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

19. Dat je kompleksan broj $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

a) Izračunati $\mathrm{Re}\left(\frac{z^{16}}{1+i\sqrt{3}}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{z^4}{z\sqrt{2}-i}\right)$.

b) Odrediti sve $\sqrt[3]{z}$ i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

20. Iz uslova $\mathrm{Re}(z^2+1)=1$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right)=1$ odrediti kompleksan broj z. Za tako odredjen kompleksan broj izračunati $\sqrt{z}$ i z^4.

21. Na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:

$$a\rho b \Leftrightarrow |a|\leq|b| \wedge \arg(a)\leq\arg(b).$$

Dokazati da je ρ relacija poretka.